Equation fonctionnelle

On désire étudier les applications $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés :

(1) $\forall x,y\in\mathbb{N}, f(x+y)\leq f(x)+f(y)$,

(2) $\forall x,y\in\mathbb{N}, f(xy)=f(x)f(y)$.

Partie I – Exemples

L'application identité satisfait aux propriétés (1) et (2). Cherchons d'autres exemples...

1. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ constante égale à C .
   Pour quelle(s) valeur(s) de C , la fonction f vérifie-t-elle les propriétés (1) et (2).

2. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $f(n)=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 1 \text{ sinon}\end{cases}$.
   Montrer que f vérifie les propriétés (1) et (2).

Partie II – Quelques propriétés

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés (1) et (2).

1.a En s'appuyant sur des valeurs particulières de x et y établir que $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

1.b De même, justifier que $f(1)=0$ ou $f(1)=1$.

2.a Montrer que si $f(0)=1$ alors f est constante égale à 1.

2.b Montrer que si $f(1)=0$ alors f est constante égale à 0.

On suppose désormais f non constante.

2.c Justifier $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

3.a Montrer que pour tout $x\in\mathbb{N}$, on a $f(x)\leq x$.

3.b Justifier enfin que pour tout $x\in\mathbb{N}$ et tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $f(x^n)=f(x)^n$.

Partie III – Ajout de l'hypothèse : f est croissante

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ croissante, non constante, vérifiant les propriétés (1) et (2).

1. Soit $x\in\mathbb{N}^*$.

1.a Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe $q_n\in\mathbb{N}$ tel que $2^{q_n}\leq x^n<2^{q_n+1}$.

1.b Justifier $n\ln x-\ln 2<q_n\ln 2\leq n\ln x$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{q_n}{n}$

1.c Justifier que $q_n\ln f(2)\leq n\ln f(x)\leq(q_n+1)\ln f(2)$.

1.d En déduire : $\ln x\ln f(2)=\ln 2\ln f(x)$

2. On pose $\alpha=\dfrac{\ln f(2)}{\ln 2}$.

2.a Montrer que $\forall x\in\mathbb{N}^*, f(x)=x^\alpha$.

2.b Quelles sont les valeurs possibles pour $f(2)$?
   En déduire $\alpha=0$ ou 1 .

Correction

d'après ENAC 1984

Partie I

1. f vérifie (1) et (2) ssi $C \leq 2C$ et $C = C^2$.
La condition $C \leq 2C$ est vérifiée pour tout $C \in \mathbb{N}$ et $C = C^2 \Leftrightarrow C(1-C) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ ou $C = 1$.
Au final : f vérifie (1) et (2) ssi $C = 0$ ou $C = 1$.

2. Soit $x, y \in \mathbb{N}$.
Si x et y sont tous deux pairs alors $f(x+y) = 0, f(x) + f(y) = 0, f(xy) = 0$ et $f(x)f(y) = 0$.
Si x et y sont de parités contraires alors $f(x+y) = 1, f(x) + f(y) = 1, f(xy) = 0$ et $f(x)f(y) = 0$.
Si x et y sont tous deux impairs alors $f(x+y) = 0, f(x) + f(y) = 2, f(xy) = 1$ et $f(x)f(y) = 1$.
Dans tous les cas, les propriétés (1) et (2) sont vérifiées.

Partie II

1.a Pour $x = y = 0$ la relation (2) impose $f(0) = f(0)^2$ d'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

1.b Pour $x = y = 1$ la relation (2) impose $f(1) = f(1)^2$ d'où $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

2.a Supposons $f(0) = 1$.
En prenant $y = 0$, la relation (2) donne $\forall x \in \mathbb{N}, f(0) = f(x)f(0)$ donc $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = 1$.

2.b Supposons $f(1) = 0$.
En prenant $y = 1$, la relation (2) donne $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = f(x)f(1)$ donc $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = 0$.

2.c On vient d'obtenir : $(f(0) = 1$ ou $f(1) = 0) \Rightarrow f$ constante.
Par contraposée : f non constante $\Rightarrow f(0) \neq 1$ et $f(1) \neq 0$.
1.a et 1.b donnent alors f non constante $\Rightarrow f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

3.a Par récurrence sur $x \in \mathbb{N}$.
Pour $x = 0$: ok
Supposons la propriété au rang $x \geq 0$.
$f(x+1) \leq f(x) + f(1) = f(x) + 1 \underset{HR}{\leq} x + 1$.
Récurrence établie.

3.b Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $f(x^0) = f(1) = 1 = f(x)^0$.
Supposons la propriété au rang $n \geq 0$.
$f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = f(x^n)f(x) \underset{HR}{=} f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$.
Récurrence établie.

Partie III

1.a 2 démarches :

(1) $2^{q_n} \leq x^n < 2^{q_n+1} \Leftrightarrow q_n \leq \dfrac{n \ln x}{\ln 2} < q_n + 1$ et par suite $q_n = E\left(\dfrac{n \ln x}{\ln 2}\right)$ est convenable.

(2) Soit $A = \left\{q \in \mathbb{N} / 2^q \leq x^n\right\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car $q = 0 \in A$.

Puisque $\forall q \in A, q \leq 2^q \leq x^n$, la partie A est majorée et donc au final possède un plus grand élément q_n.
Celui-ci résout notre problème.

1.b $2^{q_n} \leq x^n < 2^{q_n+1}$ donne $q_n \ln 2 \leq n \ln x < (q_n + 1)\ln 2$ d'où $q_n \ln 2 \leq n \ln x$ et $n \ln x - \ln 2 < q_n \ln 2$.
Par suite $\dfrac{\ln x}{\ln 2} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{q_n}{n} \leq \dfrac{\ln x}{\ln 2}$ et par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q_n}{n} = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

1.c Puisque f est supposée croissante : $f(2^{q_n}) \leq f(x^n) \leq f(2^{q_n+1})$ puis en vertu de II.3.b :
$f(2)^{q_n} \leq f(x)^n \leq f(2)^{q_n+1}$ ce qui donne $q_n \ln f(2) \leq n \ln f(x) \leq (q_n + 1)\ln f(2)$.
Notons que $f(1) = 1$ et donc $f(x), f(2) > 0$ ce qui permet d'introduire $\ln f(2)$ et $\ln f(x)$.

1.d On obtient alors $\frac{q_n}{n}\ln f(2) \le \ln f(x) \le \left(\frac{q_n}{n}+\frac{1}{n}\right)\ln f(2)$ puis à la limite quand $n \to +\infty$,

$\frac{\ln x}{\ln 2}\ln f(2) \le \ln f(x) \le \frac{\ln x}{\ln 2}\ln f(2)$ et enfin $\ln x \ln f(2) = \ln 2 \ln f(x)$.

2.a Pour $x \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln f(x) = \alpha \ln x$ donc $f(x) = x^\alpha$.

Notons que d'autre part $f(0) = 0$ comme vu en II.2.c

2.b D'une part $f(2) > 0$ et d'autre part $f(2) \le 2$ en vertu de II.3.a donc $f(2) \in \{1,2\}$ puis $\alpha \in \{0,1\}$.